

* 学术论文 *

基于 Ostrowski 不等式的有限 Hilbert 变换在 CT 重建算法中的应用*

姬长国^{1,2} 崔毅东³ 贾鹏翔¹ 崔智² 包尚联^{1**}

1. 北京大学物理学院, 北京 100871; 2. 深圳惠恒集团, 深圳 518038;

3. 北京邮电大学电信工程学院, 北京 100876

摘要 研究了一种由 Ostrowski 不等式推导出的有限 Hilbert 变换近似公式在 CT 重建算法中的应用. 通过两个解析函数验证了这一有限 Hilbert 变换近似公式的计算精度, 并将其应用到基于弦线的背投影滤波锥束 CT 重建算法中. 结果表明这一近似公式计算精度和效率较高, 这一算法可在基于弦线的背投影滤波 CT 重建算法中得到应用.

关键词 有限 Hilbert 变换 滤波背投影 CT 重建

有限 Hilbert 变换(FHT)在空气动力学、求解微分方程以及其他领域中具有重要应用^[1]. 它实质上是在有限区间内对某一解析函数的 Cauchy 主值积分变换. 不失一般性, FHT 在区间 $[-1, 1]$ 上的数学表达式为:

$$(Hf)(t) = PV \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(\tau)}{\tau-t} d\tau := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-1}^{t-\epsilon} \frac{f(\tau)}{\tau-t} d\tau + \int_{t+\epsilon}^1 \frac{f(\tau)}{\tau-t} d\tau \right]$$

其中符号 PV 表示 Cauchy 主值积分, ϵ 为一无限小正数. 目前针对这一变换已经发展出多种数值计算方法, 这些算法的积分法则、复杂程度、计算精度以及数值稳定性都有所不同. 总的说来, 算法大致可包括 Gauss 型积分法^[2]、基于 Chebyshev 多项式配置法^[3]、基于 SINC 函数法^[4,5]、基于中间函数变换法以及基于特殊不等式算法等^[6-9]. 其中 Gauss 方法包括 Gauss-Legendre 积分方法、Gauss-Jacobi 积分方法以

及小波变换多分辨分析(MRA)积分方法. 基于中间函数变换算法包括 IMT 方法、TANH 方法(实质上是 SINC 方法)以及双指数 DE 方法, 即 Tanh-Sinh 方法等. Gauss 方法需要计算相应的节点和权重因子, 它的主要缺点是如果奇点刚好位于节点上将不能保证计算精度, 在实际积分过程中需要对这一情况进行特殊处理(如 Gauss-Kronrod 方法)^[10]. QUADPACK 中的程序 QAWC 就是采用这种算法. NAG(英国数值计算集团)程序中 D01AQC 算法就是在这—算法基础上的进一步改进^[11]. Chebyshev 方法大部分的计算开销需要通过快速 Fourier 变换计算相应的函数展开系数. SINC 方法是利用 SINC 函数计算积分函数的节点位置. 中间函数变换法(IMT 方法、TANH 方法和 DE 方法)可以以较快的收敛速度得到高精度计算结果, 但它要求进行较高精度的浮点运算, 并且在处理 Cauchy 主值积分时需要两次采用分段积分或做较高阶的逼近计算. 在实际应用中, 通常需要在满足一定计算精度下对相关数据进行快速 FHT 计算. CT 领

2007-04-18 收稿, 2007-05-23 收修修改稿

* 国家自然科学基金(批准号: 10605002, 60672104, 10675013)和北京市自然科学基金(批准号: 3073019)资助项目

** 通信作者, E-mail: bao@pku.edu.cn

©1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

域中的基于弦线段的滤波背投影(BPF)重建算法就是这一种情况^[12-14]. 该算法中重要的一步是需要对弦线段上背投影后的数据进行 FHT(即滤波过程). 本文介绍一种基于 Ostrowski 不等式的 FHT 近似算法, 研究了这一近似公式应用于快速 CT 重建领域的可能性.

1 近似公式推导及数值验证

1.1 公式推导

以下简要给出基于 Ostrowski 不等式推导出 FHT 近似公式的主要步骤, 详见文献[9].

设 $f(x)$ 是在 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 则对于所有 $x \in [a, b]$ 如下不等式成立:

$$\left| f(x)(b-a) - \int_a^b f(t)dt \right| \leq \left[\frac{1}{2}(b-a) + \left| x - \frac{a+b}{2} \right| \right] V_a^b(f) \quad (1)$$

这里的 $V_a^b(f)$ 代表区间 $[a, b]$ 上函数 f 的全变差.

其中 $\frac{1}{2}$ 为最佳常数. $V_a^b(u) = \sup \{ V_f(x_0, \dots, x_n) \}$.

$V_f(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$. $V_f(x_0, \dots, x_n)$ 为 f 关于分割 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 的变差. 根据以上 Ostrowski 不等式, 同时假设其导数 f' 也是区间 $[a, b]$ 上的有界变差, 则对于任意 $t \in [a, b]$ 和 $\lambda \in [0, 1]$, 可以得到如下不等式:

$$\left| (Hf)(a, b; t) - \frac{f(t)}{\pi} \ln \left[\frac{b-t}{t-a} \right] - \frac{b-a}{\pi} [f; \lambda t + (1-\lambda)b, \lambda t + (1-\lambda)a] \right| \leq \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \left| \lambda - \frac{1}{2} \right| \right] \left[\frac{1}{2}(b-a) + \left| t - \frac{a+b}{2} \right| \right] V_a^b(f') \quad (2)$$

其中 $[f; \alpha, \beta] := \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}$. 另外当 $n \geq 1$, $\lambda_i \in [0, 1] (i=0, \dots, n-1)$ 并且 $t, \tau \in [a, b]$ 和 $t \neq \tau$ 时存在以下不等式:

$$\left| \frac{1}{\tau-t} \int_t^\tau f(s)ds - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \left[t + (i+1-\lambda_i) \frac{\tau-t}{n} \right] \right| \leq$$

$$\frac{1}{n} \left[\frac{1}{2} + \max_{i=0, \dots, n-1} \left| \lambda_i - \frac{1}{2} \right| \right] \left| V_t^\tau(f) \right| \quad (3)$$

如果 $\lambda = (\lambda_i)_{i=0, \dots, n-1}$, $\lambda_i \in [0, 1] (i=0, \dots, n-1)$ 同时定义下式:

$$S_n(f; \lambda, t) = \frac{b-a}{\pi n} \sum_{i=0}^{n-1} \left[f; t + (i+1-\lambda_i) \frac{b-t}{n}, t + (i+1-\lambda_i) \frac{a-t}{n} \right] \quad (4)$$

可以推导出如下不等式:

$$\left| (Hf)(a, b; t) - \frac{f(t)}{\pi} \ln \left[\frac{b-t}{t-a} \right] - S_n(f; \lambda, t) \right| \leq \frac{b-a}{n\pi} \left[\frac{1}{2} + \max_{i=0, \dots, n-1} \left| \lambda_i - \frac{1}{2} \right| \right] \left[\frac{1}{2}(b-a) + \left| t - \frac{a+b}{2} \right| \right] \left| V_a^b(f') \right| \leq \frac{b-a}{n\pi} \left| V_a^b(f') \right| \quad (5)$$

当 $\lambda_i = \frac{1}{2} (i=0, \dots, n-1)$ 时可以得到:

$$\left| H_n(f; a, b, t) - \frac{f(t)}{\pi} \ln \left[\frac{b-t}{t-a} \right] - M_n(f; t) \right| \leq \frac{b-a}{2n\pi} \left[\frac{1}{2}(b-a) + \left| t - \frac{a+b}{2} \right| \right] V_a^b(f'), t \in [a, b]$$

其中,

$$M_n(f; t) := \frac{b-a}{\pi n} \sum_{i=0}^{n-1} \left[f; t + \left(i + \frac{1}{2} \right) \frac{b-t}{n}, t + \left(i + \frac{1}{2} \right) \frac{a-t}{n} \right] \quad (6)$$

最终得到 FHT 估计表达式:

$$H_n(f; a, b, t) := \frac{f(t)}{\pi} \ln \left[\frac{b-t}{t-a} \right] + M_n(f; t), t \in [a, b] \quad (7)$$

1.2 数值验证

以下我们选取了两个解析函数验证了上述 FHT 算法的精度. 在数值计算时级数都采用实际数据长度 J . 验证 1

解析函数 $f(t) = \sqrt{1-t^2}$ 在区间 $[-1, 1]$ 内的 FHT 理论表达式为 $(Hf)(t) = -t$. 原函数和经过

FHT 的函数曲线见图 1。采用基于 Ostrowski 不等式的近似公式 FHT 变换结果与理论结果的差值曲线见图 2，除了位于端点处的窄区间外(误差 ~1E-3)数值误差范围为 1E-5。仔细观察可以发现此函数具有特殊性：在 -1 和 +1 附近容易产生指数为 $\frac{1}{2}$ 的高阶奇异，这是在两端处积分误差较大的原因(数值实验表明可以通过增大阶数 n 降低误差)，为此我们选取另外一个无高阶奇异的函数进行数值验证。

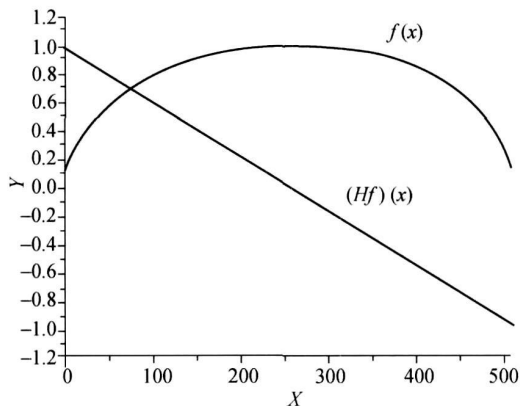


图 1 函数 $f(t) = \text{sqrt}(1-t^2)$ 和在区间 $[-1, 1]$ 内 FHT 理论公式 $(Hf)(x) = -t$ 的函数曲线
横坐标为此区间采样点的序号(0-511)

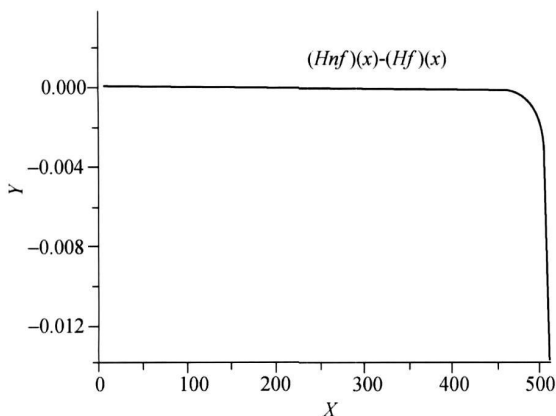


图 2 采用 Ostrowski 不等式近似公式 FHT 结果与理论函数 $(Hf)(x) = -t$ 差值曲线
数值误差范围为 1E-3-1E-5。
横坐标为此区间采样点的序号(0-511)

验证 2

解析函数 $f(t) = t(1-t)$ 在区间 $[0, 1]$ 的 FHT

理论表达式如下：

$$(Hf)(t) = \frac{t-t^2}{\pi} \lg\left(\frac{1-t}{t}\right) - \frac{t}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \quad (8)$$

原函数和经过 FHT 的曲线见图 3。采用基于 Ostrowski 不等式的近似公式 FHT 变换结果与理论结果的差值曲线见图 4，数值误差范围为 1E-7-1E-6。

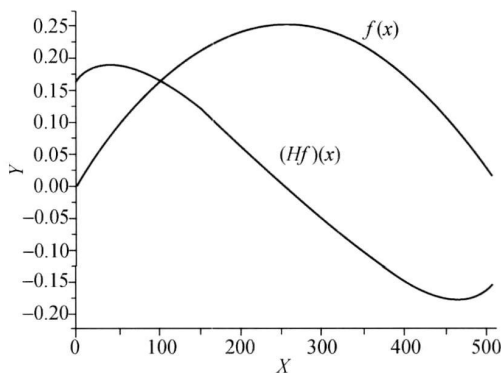


图 3 函数 $f(x) = t(1-t)$ 和在区间 $[-1, 1]$ 内 FHT 理论表达式(8)的函数曲线
横坐标为此区间采样点的序号(0-511)

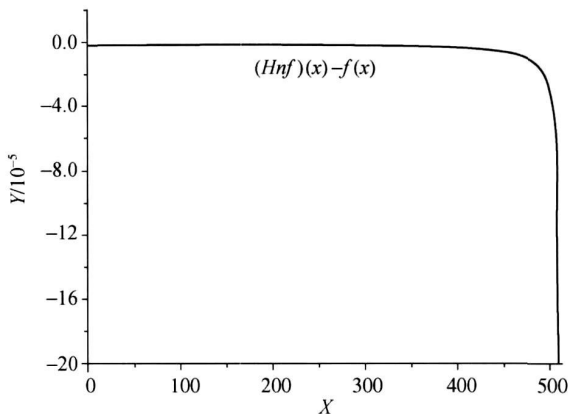


图 4 采用 Ostrowski 不等式近似公式 FHT 结果与理论函数公式(8)差值曲线
数值误差范围为 1E-7-1E-6

2 在基于弦线段的背投影滤波重建算法中的应用

2.1 背投影滤波重建算法公式

下式是在一般轨迹下基于弦线段的背投影滤波重建公式，详见文献[15]。

$$f(r) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(x_{c2} - x_c)(x_c - x_{c1})}}$$

$$\left\{ f_0(\mathbf{r}) + P(u_0, v_0, s_a) \left[\frac{\sqrt{(l-x_{c2})(l-x_{c1})}}{l-x_c} + \frac{\sqrt{(l+x_{c2})(l+x_{c1})}}{l+x_c} \right] \right\} \quad (9)$$

其中 \mathbf{r} 为待重建物体内一点, l 为弦线段的半长度, $[x_{c1}, x_{c2}]$ 为背投影线段. x_{c1} , x_{c2} 和 x_c 是弦线上的三个坐标值(原点为弦线段中点, 方向为由 x_{c1} 至 x_{c2}), $x_{c1} < x_c < x_{c2}$, 参考图 5.

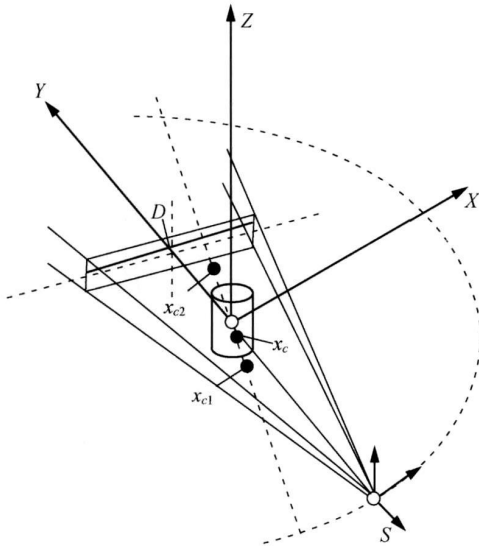


图 5 一般扫描轨迹下固定和旋转坐标系以及弦线段、弦线及弦线投影示意图

$f_0(\mathbf{r}) = -h\{g(x_c)\}$ $h\{\}$ 表示 $g(x_c)$ 表示离散数据进行 FHT 后 x_c 处的对应值. $g(x_c)$ 的函数表达式为:

$$g(x_c) = \int_{s_a}^{s_b} ds \frac{P'(u', v', s)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|^2} \quad (10)$$

$s \in [s_a, s_b]$ 为背投影源轨迹段的范围, s_a, s_b 为弦线与轨迹的两个交点, \mathbf{r}' 为背投影线段上的一点.

$P(u_0, v_0, s_a)$ 为在轨迹 s_a 处射线沿弦线方向在探测器上的投影值. $P'(u', v', s)$ 为探测器投影数据微分, 计算公式如下:

$$P'(u', v', s) = - \left[\frac{d\mathbf{r}_0}{ds} \beta \right] P'(u', v', s) + A \frac{d\mathbf{r}_0}{ds} \cdot \left(\mathbf{e}_u \frac{\partial}{\partial u'} + \mathbf{e}_v \frac{\partial}{\partial v'} \right) P(u', v', s) \quad (11)$$

2.2 重建参数

我们采用螺旋扫描轨迹进行重建数值模拟, 将基于 Ostrowski 不等式的近似公式应用到 CT 重建算法中. 扫描参数如下: 半径 1.0 m、螺距 0.02 m、起始角为 -1.88 rad、步长 0.005 rad、投影次数 750. 数字体模采用 FORBILD 模型^[16]、探测器分辨率 512×40 、像素大小 $600 \mu\text{m} \times 600 \mu\text{m}$ 、探测器中心到旋转中心的距离为 0.35 m. 图 6 给出投影的典型图像. 本实验的数值模拟程序见文献[17].

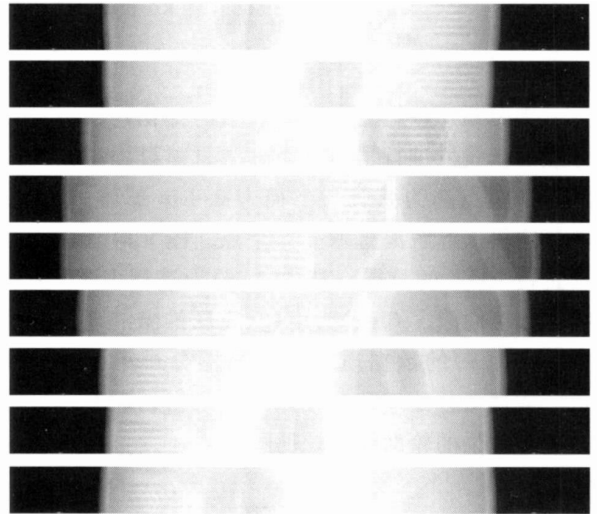


图 6 用于 BPF 重建模拟的典型投影图像
由上至下分别是: 第 1 帧, 中间第 100($n=1 \dots 7$) 帧和第 750 帧

2.3 重建结果及分析

我们选择位于 XY 面内的一个正方形感兴趣区, 矩阵大小 256×256 , 中心坐标 $(0, 0, 0)$. 图 7 是理论图像和重建图像的比较, 图像灰度窗口 $[0, 1.8]$. 图 8 为过中心点的水平和垂直方向的重建和理论轮廓线比较.

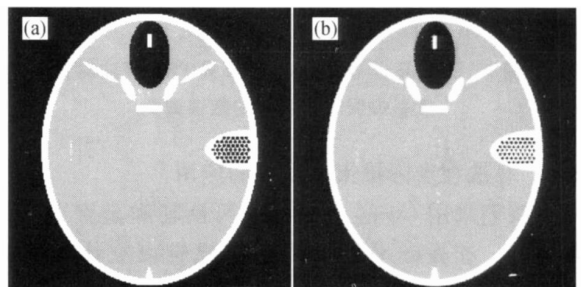


图 7 理论图像 (a) 和重建后的图像 (b)

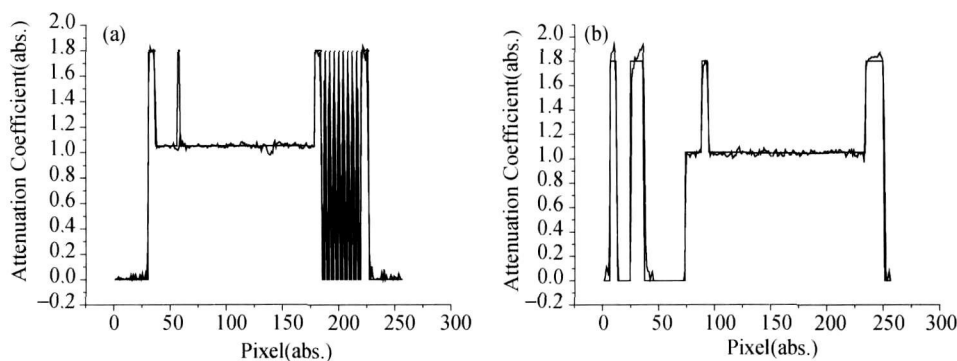


图 8 过(0, 0)水平和垂直方向的重建结果(a)与理论值轮廓线(b)比较

为分析 FHT 变换前后数据的变化, 我们对过原点的弦线段进行了单独重建. 重建过程中弦线段的两个端点选为弦线与半径为 0.1 m 球体的交点. 在该线段上等距离选取 512 个点. 图 9 对背投影数据进行 FHT 的结果, 其中 $f(x)$ 为进行 FHT 前的离散数值曲线, $f_0(x)$ 为由(9)式反推出的理论数值曲线. $f(x)$ 的数据质量与探测器分辨率、投影次数、数据微分处理和背投影过程有密切联系. 最终重建与理论的轮廓线比较见图 10.

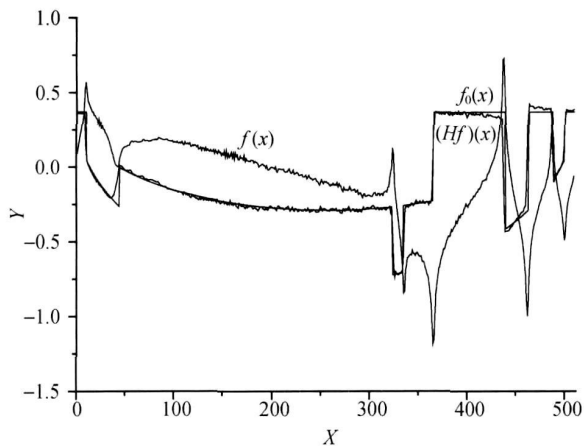


图 9 采用基于 Ostrowski 不等式 FHT 算法对背投影数据进行变换的数值曲线

2.4 算法在实际锥束系统中的应用

我们采用 Co-60 放射源、可旋转和垂直上升的载物台、非晶硅平板探测器组成锥束立体成像系统. 其中, 放射源的几何尺寸为 $\Phi 1 \text{ mm} \times 3 \text{ mm}$ 、活度为 200 Ci ($1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ Bq}$). 探测器采用

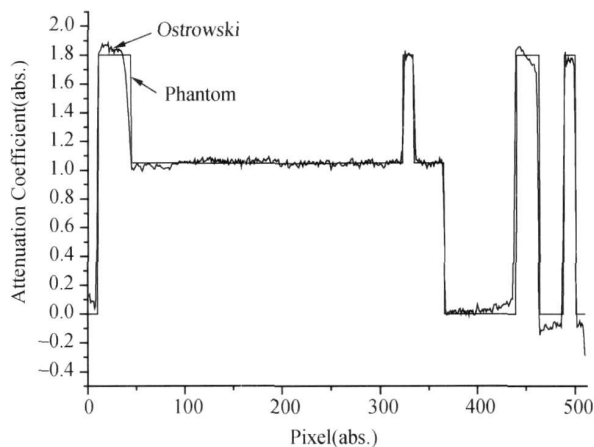


图 10 采用 Ostrowski 算法时过原点的弦线段的重建结果与理论值的轮廓线比较

PerkinElmer 公司的平板探测器 (型号: XRD 1640 AL3ES). 它的总探测单元个数为 1024×1024 , 单元大小为 $400 \mu\text{m} \times 400 \mu\text{m}^2$. 考虑到降低射线散射和辐射安全的需要, 我们在放射源屏蔽体上安装了钨合金的准直器. 载物台的旋转速度和位置、纵向位移速度和距离以及它们在不同扫描轨迹的配合采用可编程处理器控制. 轨迹圆半径为 100 cm, 纵向行程为 15 cm. 投影个数为 100. 投影数据由 1024×1024 合并成 256×256 . 这里给出采用马鞍型轨迹进行的扫描结果和重建结果. 体模实物图像和典型的投影图像 (经过裁剪) 见图 11.

我们选取位于旋转中心矩阵大小为 $256 \times 128 \times 128$ 的感兴趣区域. 采用 BPF 算法进行了图像重建. 图 12 分别是沿轴向、冠状和矢状方向的重建

结果. 需要指出的是: 由于实验装置机械的系统误差, 重建后的图像存在环状伪影. 但是我们可以清

晰确定胸部体模轮廓, 其中, 图 12(a), (c) 两图中的黑线部分是体模拼装接缝区域.

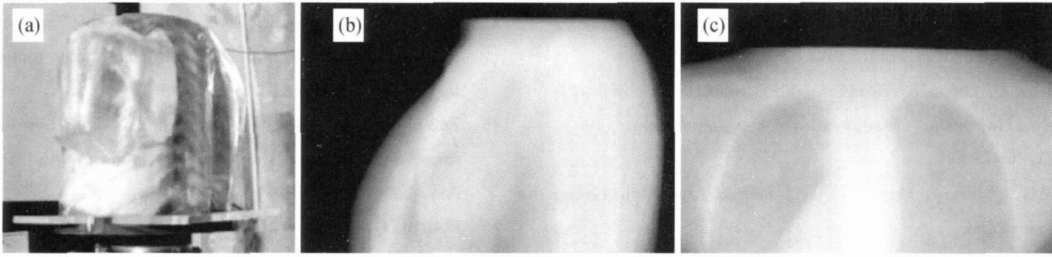


图 11 胸部体模及其典型的投影图像
(a) 胸部体模; (b) 矢状方向投影; (c) 冠状方向投影
(原始投影图像 1024×1024 被合并成 256×256)

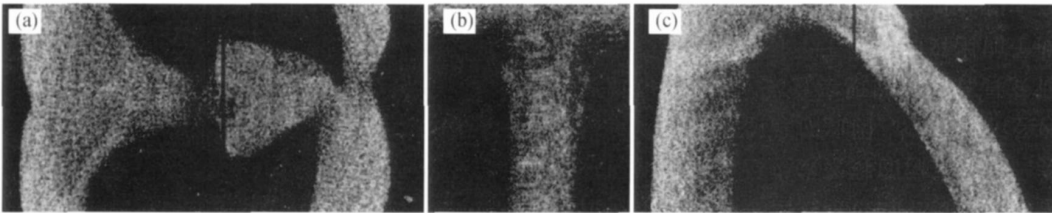


图 12 胸部体模重建结果
(a) 轴向平面; (b) 冠状平面; (c) 矢状平面
(原始投影图像 1024×1024 被合并成 256×256)

3 结论

假设有 $t \in 0, \dots, J-1$ 共 J 个离散数据, 由 (6) 式和 (7) 式我们可以进一步推导出对这些数据进行 FHT 的表达式:

$$(H_n f)(t) := \frac{f(t)}{\pi} \ln \left[\frac{J-1}{t} - 1 \right] + \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i) - f(x_i - \Delta x_i)}{(2i+1)}, \quad t \in [0, J) \quad (12)$$

其中 $x_i = t + \left[i + \frac{1}{2} \right] (J - t - 1) / n$, $\Delta x_i = (J-1) \left[i + \frac{1}{2} \right] / n$. 在实际计算机编码中需要插值计算 $f(x_i)$. 但整个算法中无高精度浮点运算的要求, 在处理奇点时无奇点位置判断, 不用采用两次分段积分和高阶逼近, 积分节点位置和步长与被积函数无关, 可方便地结合查表实现快数运算, 模拟数据和实际 CT 重建数据分别表明这一算法可在基于弦线的背投影滤波 CT 重建算法得到应用.

参 考 文 献

- 1 Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography. New York: Wiley, 1986
- 2 Elliott D, Paget DF. Gauss type quadrature rules for Cauchy principle value integrals. Mathematics of Computation, 1979, 33(145): 301-309
- 3 Hasegawa T, Toni T. An automatic quadrature for cauchy principle value integrals. Mathematics of Computation, 1991, 56(194): 741-754
- 4 Bialecki B, Keast P. A sinc quadrature subroutine for Cauchy principal value integrals. J Computational and Applied Mathematics, 1999, 112: 3-20
- 5 Bialecki B. A Sinc-hunter quadrature rule for Cauchy principle value integrals. Mathematics of Computation, 1990, 55(192): 665-681
- 6 Natarajan A, Mohankumar N. A comparison of some quadrature methods for approximating Cauchy principle value integrals. J Computational Physics, 1995, 116: 365-368
- 7 Mori M. Discovery of the double exponential transformation and its developments. Publ. RIMS, Kyoto Univ, 2005, 41: 897-935
- 8 Dragomir NM, Dragomir SS, Farrell P. Approximating the fi-

- nite Hilbert transform via trapezoid type inequalities. *Computers and Mathematics with Applications* 2002, 43: 1359—1369
- 9 Dragomir SS. Approximating the finite Hilbert transform via an Ostrowski type inequality for functions of bounded variation. *J Inequal Pure and Appl Math*, 2002, 3(4): Art 51
- 10 Rabinowitz P. Gauss-Kronrod integration rules for cauchy principal value integrals. *Mathematics of Computation*, 1983, 41(163): 665—681
- 11 The NAG C Library, Mark 7, The Numerical Algorithms Group Ltd, Oxford UK
- 12 Pan XC, Zou Y, Xia D. Image reconstruction in peripheral and central regions-of-interest and data redundancy. *Med Phys*, 2005, 32(3): 673—685
- 13 Zou Y, Pan XC, Sidky EY. Image reconstruction in regions-of-interest from truncated projections in a reduced fan-beam scan. *Phys Med Biol*, 2005, 50: 13—27
- 14 Defrise M, Noo F, Clackdoyle R et al. Truncated Hilbert transform and image reconstruction from limited tomographic data. *Inverse Problems*, 2006, 22: 1037—1053
- 15 Zou Y, Pan XC, Sidky EY. Theory and algorithms for image reconstruction on chords and within regions of interest. *J Opt Soc Am*, 2005, 22(11):2372—2384
- 16 FORBILD <http://www.imp.uni-erlangen.de/forbild/english/>
- 17 COBRA <http://mpe.pku.edu.cn/lab/jchangguo/download/cobraIbeta.zip>

欢迎订阅 2008 年度《自然科学进展》(中英文版)

《自然科学进展》(月刊)、《Progress in Natural Science》(月刊)是反映我国自然科学领域基础研究和应用基础研究成果的综合性学术期刊。刊登具有创造性、高水平、有重要意义的学术论文,国内外发行。

《Progress in Natural Science》自 1993 年起被 CA (Chemical Abstracts) 收录。1996 年被 ISI (The Institute for Scientific Information) 收入 SCI Search, Research Alert 和 Current Contents Physical, Chemical & Earth Sciences。凡刊登在《Progress in Natural Science》上论文,全部进入国际联网检索系统。该刊海外由 Elsevier 发行。

《自然科学进展》为中国科技信息情报所信息分析中心、中国科学院中国科学引文数据库和中国生物医学文献光盘数据库等的统计源期刊。

主要栏目

专题评述 介绍国内外在某一研究领域的最新研究进展。

学术论文 报道具有原始创新性的未发表过的成果。

研究简讯 简要、快速报道某一研究工作的主要结论或阶段性成果。

实验室通讯 介绍国家重点实验室的研究活动概况和进展。

学术论坛 对某一学术观点开展讨论。

订阅价格: 自然科学进展: 780.00 元; Progress in Natural Science: 900.00 元

全年订阅《自然科学进展》中、英文,可享受六折优惠。

联系方式

联系电话: 010-62327204; **传真:** 010-62326921; **邮编:** 100085

通信地址: 北京海淀区双清路 83 号 国家自然科学基金委员会杂志社

联系人: 刘俐 程宇

E-mail: chengyu@nsfc.gov.cn

银行户名: 国家自然科学基金委员会科学基金杂志社

开户银行: 中国工商银行北京北太平庄支行 **帐号:** 0200010009200062483

订阅截止日为 2008 年 1 月 20 日

